発展方程式について (作用素論とその周辺)

加藤, 敏夫

数理解析研究所講究録
307巻 1977年 63-83

発展方程式について

UC Berkeley　加藤敏夫

§1. Banach 空間 X[1] において、準線型な発展方程式の初期値問題

$$du + A(u)\,u = 0, \qquad 0 \leq t \leq ?, \tag{1}$$

$$u(0) = \phi \tag{2}$$

について総括的な考察をする。ここで du は $du(t)/dt$ の略で、詳しく書けば、(1) が $du(t)/dt + A(u(t))\,u(t) = 0$ を意味することはいうまでもない。未知函数 u は X の値をとり、$A(w)$ は X の線型作用素（一般に非有界）で $w \in W$ に依存する（W は X のある部分集合）。故に未知函数 u の値は実は W に含まれる。同じ理由で $\phi \in W$ である。従来の私の習慣に従って、以下 $A(w)$ が X 内の C_0-型半群の生成素の符号をかえたもの（これを単に生成素とよぶ）である場合を考察する。これが空間 X の主な役目である。

§2. 少し横道にそれるが、(1) の右辺が 0 でなくて、もっと一般に $f(u)$ の形である場合も、形式的には (1) の形に帰着できることを注意しておく。それには問題をかきかえて

1) 以下すべての Banach 空間は実で回帰的かつ可分とする。

$$d\begin{pmatrix}u\\k\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}A(u) & -f(u)\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\k\end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix}u\\k\end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix}\phi\\1\end{pmatrix},$$

とすればよいのである。ここにkは数値関数である。

§3. 問題(1−2)を解くのに簡単な逐次近似法，あるいはそれと大体同等な方法として，不動点定理を用いることを考える。そのため(1)を線型化して

$$du + A^{v}(t)u = 0, \quad [\, A^{v}(t) = A(v(t))\,] \qquad (3)$$

とし，(3−2)を解く。ただしv: $t \mapsto v(t)$ はある区間$[0, T']$で定義され，Wの値をとる適当な関数族Eに属するものとする。(3−2)が解けたとすれば，解uはvできまるから写像 $u = \Phi v$ が定まる。もしΦがEをEにうつし，適当な条件（例えばEが完備距離空間でΦが縮小性をもつ）が満されれば，Φの不動点として(1−2)の解uが$[0, T']$の上で求まるであろう。

§4. この計画を遂行するにはいろいろ準備と仮定がいる。(3−2)を解くには線型発展方程式の理論を用いる。その種の理論は多数あるが，上述のようにここでは半群理論にもとづくものを用いる（　田辺[1]，増田[2]などに詳述されているから参照されたい）。

まず生成素の族 $A^{v} = \{A^{v}(t)\}$ が<u>安定</u>であることは弱くと

不可欠の条件である。それを保証するためには、通常 $A^{v}(t)$ が（Xの上の）準縮小半群の生成素であるか、もう少し一般に、（なめらかに）t に依存する X の同値ノルムに関して、準縮小半群の生成素であることが、実際上不可欠であろう。

このための便利な仮定としては、X の同値ノルム $N(X)$ の全体に自明な方法で距離を導入し、W から $N(X)$ への"なめらかな"写像 $w \mapsto \| \ \|_w$ があって、$A(w)$ が $X_w = (X, \| \ \|_w)$ で準縮小半群の生成素とすること（[1, 2] の記号で $A(w) \in G(X_w, 1, \beta)$）を仮定する。（"なめらか" の意味は §6 で詳しくのべる。）

§5、(3-2) を解くには更に条件がいる。比較的一般な条件として、X に稠密かつ連続に埋めこまれた Banach 空間 Y があって、$A^{v}(t)$-許容になっている（[1, 2] 参照。粗く云えば $A^{v}(t)$ が Y でも生成素になること）のみならず、Y で安定な系を作ると仮定する。更に $Y \subset D(A^{v}(t))$ で $t \mapsto A^{v}(t) \in B(Y, X)$ がノルム連続であるとする。

これらの仮定は写像 $w \mapsto A(w)$ に関する類似の仮定から導くことができる。技術的に便利な仮定として、Y から X への同型写像 S があって

$$S A(w) S^{-1} = A(w) + B(w), \qquad B(w) \in B(X), \tag{4}$$

とすると都合がよい。

§6. このように仮定して (3-2) が解けると、解 u は A^{v}

を通してvによるから，写像Φ：$v \mapsto u = \Phi v$が定まる．不動点定理をあてはめるには，Φの値域がEに含まれるようにしなければならない．このためには上に漠然とのべたEの定義を明確に　　　　　　　　　　　　しなければならない．この調節はかなり微妙な取り扱いを要求するが，結局次のようにして可能となる．$X \supset Z \supset Y$のようなもうひとつのBanach空間Zを導入して（λ_A, μ_Aは定数）

$$A(w) \in B(Y, Z), \qquad \|A(w)\|_{Y,Z} \leq \lambda_A, \tag{5}$$

$$\|A(w) - A(w')\|_{Y,Z} \leq \mu_A \|w - w'\|_Z, \tag{6}$$

と仮定する（(6)でZをXでおきかえてもよい）．

同時に§4でのべた$w \mapsto \| \ \|_w$のなめらかさを次のように規定する（$\| \ \|_X$はXの標準ノルム）．

$$\left.\begin{aligned} d(\| \ \|_w, \| \ \|_{w'}) &= \mu_N \|w - w'\|_Z, \\ d(\| \ \|_w, \| \ \|_X) &\leq \lambda_N. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

最後に，WはYの開集合であると仮定する．

このような仮定の下で，$v \in E$の正確な条件は，$|v(t) - \phi|_Y \leq \rho'$，$0 \leq t \leq T'$（ただし$\rho'$は十分小さい定数），かつvはZノルムでLipschitz連続であることとする．　　　　　EはZ-ノルムによる一様ノルムによって完備な距離空間となり，ρ', T'を適当にとれば，ΦがE内の縮小写像となって，不動点定理が使えることになり，問題(1-2)の解u（ただしtについて

局所的）の存在と一意性が証明される.

§7. u の作り方からみて，写像 $\phi \mapsto u(t)$ は Z-ノルムについては局所的にLipschitz連続（ただし $\phi \in W \subset Y$ なる制限の下で）である. これが Y-位相についても連続であることを示すには，更に仮定がいる様である. 例えば

$$\|B(w) - B(w')\|_{X,X} \leq \mu_B \|w - w'\|_Y \tag{8}$$

なら十分である. この Y-連続性はかなり興味のある結果で，その証明には線型発展方程式の解についての詳しい評価式を必要とする. 簡単な具体的例題についても，これを直接に証明することは必ずしも容易ではない. なお Y-連続性はそれ以上一般には精密化できない（例えば Y ノルムでの Hölder 連続性を証明することはできない）. これについては Kato [3] に反例がある.

§8. 以上の理論の詳細は Kato [3,4], Hughes-Kato-Marsden [5] などに，応用を含めてのべられている．典型的な例では，$A(w)$ は w に依存する係数をもつ R^m での1階微分作用素系であって，それが生成素になるのはたいてい $X = L^2(R^m)$（あるいは同種の空間の直積）をとって，w が C^1-級関数になる場合である．故に $W \subset C^1(R^m)$ となる．他方条件 (4)～(8) を満足させるためには，$Y = H^s(R^m)$, $Z = H^{s-1}(R^m)$（Sobolev 空間）とするのが適当である．ただし Y の開集合 W が C^1 に含まれるためには，$s > m/2 + 1$ と取らねばならない．通常の波動方程式（非線型弾性論を含む）や，一般相対論などでは $m=3$ であるから，$s > 5/2$ がその条件である．従来 $s \geq 4$, $s \geq 3$ などの条件が知られていたが，$s > 5/2$ は一般には最良の結果と思われる．（これについては Friedrichs [6] もみられたい．）

§9. 上の理論は特に $[0,\infty[\times R^m$ での準線型双曲型および放物型の偏微分方程式に有効であるが，R^m を $\Omega \subset R^m$ でおきかえ，境界条件が現われるようになると無力になる．その主な理由は，(4) を満足する S がみつからないことにある．本来 (4) は Y が $A(w)$-許容であることを示すための便利な仮定であるが，境界条件を含む微分作用素 $A(w)$ が $X = L^2(\Omega)$ で生成素である場合，高次の Sobolev 空間 $Y = H^s(\Omega)$ が $A(w)$-許容であることは稀であ

制限してえられる部分空間をYと

る. $H^s(\Omega)$ を適当な境界条件で すれば，それは可能であるかもしれないが，Yがwによらぬようにすることは困難であろう. 困難 は本質的に初期条件と境界条件との適合性 (compatibility) に関係しており，容易に克服できるものではない.

それで初期値ー境界値混合問題に適用できるような発展方程式の理論を作るためには，根本的に理論を作り直すことが必要である. 以下はその試みであって，弾性論のような2階の波動方程式には適用できると思われるが，$\Omega = R^m$ の場合に適用できる 上述の理論のような一般性はない.

§10. この方法においても基本的な考えは変らず，$E \ni v \mapsto u = \Phi v \in E$ を構成して不動点定理を用いる. uを求めるにはやはり線型問題(3-2)を解くのであるが，前の方法と違う点は，Wを閉集合として含む ようなYでA^v-許容のものがないことである. この難点を克服するために，一般に線型発展方程式

$$du + A(t)u = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad u(0) = \phi, \qquad (9)$$

の解の正則性の問題から出発する. ここに正則性という場合，互に関連する2つの性質が考えられる. 第一に，$u(t)$がXの元としてどのくらい"よい"元であるか（Xが関数空間であれば，$u(t)$はどのくらいなめらかな関数であるか）という

こと，第二に $t \mapsto u(t)$ がどのくらい微分可能であるかということである．この２つの性質が関連していることは，$A(t) = A$ が t によらない場合によって例示される．実際 $\phi \in D(A^k)$ と $u \in C^k([0,\infty];X)$ とは同等である．一般の場合にはこのような簡単な関係は望まれないが，類似の関係があることは容易に想像される．

われわれに興味のある正則性は主に第一の性質である．$u(t) \in W$ が不可欠の条件だからである．しかし第二の性質もあるていどは要る（§7参照）．前述の理論では，W を閉集合として含む"よい"空間 Y で A-許容なものがあることを仮定して，この正則性の問題を一挙に片づけたわけであるが，今度はそれができないのが困難の理由である．

§11．そこで今度は正則性と Y とを直接結びつけることをあきらめ，Y としては (9) を解くための手段として必要なものをとり，正則性は段階的に高めてゆく方針をとる．このため以下

$$D(A(t)) = \mathrm{const} = Y \tag{10}$$

を仮定する（これは発展方程式の初期の理論でよく用いられた仮定である）．すると Y が A-許容であることは自明である．故に $A = \{A(t)\}$ に対して（$I = [0,T]$）

$$A \in \overline{G}(X, M, \beta) \qquad (安定性) \tag{11}$$

$$dA \in L^\infty_*(I; B(Y,X)) \qquad (なめらかさ) \tag{12}$$

を仮定すると，A に属する発展作用素 $U = \{U(t,s)\}$ が存在して (9) は解をもち，$\phi \in Y$ なら $u(t) \in Y$ となる．ただし Y のえは十分な正則性をもたないから，これだけでは十分でない．

（L^∞_* は作用素値関数として弱可則かつ本質的に有界なること．$\overline{G}$ は生成素系の安定性を表わすのに用い，単独作用素の場合の G と区別する．）

正則性を高めるために，$\zeta > \beta$ として

$$U_1 = (A+\zeta)\, U\, (A+\zeta)^{-1} \qquad (13)$$
$$\left[\text{すなわち} \quad U_1(t,s) = (A(t)+\zeta)\, U(t,s)\, (A(s)+\zeta)^{-1}\right]$$

とおくと，U_1 は形式的には

$$A_1 = A - C_1, \qquad C_1 = dA\,(A+\zeta)^{-1}, \qquad (14)$$

で与えられる系 $A_1 = \{A_1(t)\}$ に属する発展作用素になることに注意する。実は U_1 は十分な微分可能性をもたないので，弱発展作用素とよび，U などを強発展作用素と呼んで区別する。実は (14) からすぐ分るように，$C_1 \in L^\infty_*(I; B(X))$ となるので，A_1 も安定かつ (10) を満たす。故に A_1 が (12) を満しさえすれば U_1 は強となる。その条件は

$$dC_1 \in L^\infty_*(I; B(Y,X)), \qquad (15)$$

で与えられる。U_1 が強となれば $U_1(t,s)$ は Y を Y にうつすから，$U(t,s)$ は $(A(s)+\zeta)^{-1}Y = D(A(s)^2)$ を $(A(t)+\zeta)^{-1}Y = D(A(t)^2)$ にうつす。特に $\phi \in D(A(0)^2)$ ならば，(9) の解は $u(t) \in D(A(t)^2)$ を満す。このようにして2階の正則性が求められたことになる。同時に $t \mapsto u(t)$ の正則性も，$u \in C^2(I; X) \cap C^1(I; Y)$ の形にえられる。

§12. 上の構成はくり返し行うことが出来て，$k = 1, 2, 3, \cdots, n$ に対して $A_k = A_{k-1} - C_k$，$C_k = dA_{k-1}\,(A_{k-1}+\zeta_{k-1})^{-1}$，

$\cdots$, と相当する発展作用素 U_k が作れる．そこで

$$S_k = (A_{k-1}+\xi_{k-1})\cdots(A_1+\xi_1)(A+\xi) \tag{15a}$$

とおけば，

$$\phi \in D(S_k(0)) \quad なら \quad u(t) \in D(S_k(t)) \tag{16}$$

という形に高階の正則性を求めることができる

ただしこのためには(15)に相当して

$$dC_k \in L^\infty_*(I;B(Y,X)),\quad k=1,2,\cdots,n, \tag{17}$$

を仮定せねばならない．しかし C_k は帰納的に逐次定義されてゆくので，条件(17)は甚だ見通しがわるい．

なお．$D(S_2(t)) = D(A(t)^2)$ となること上述の通りであるが，同様な結果は $k \geq 3$ では成立しない（ dA, d^2A, $\cdots$ が関係するから）．このため $D(S_k(t))$ の具体形も見通しがよくない．

§13．これらの不便を除いてもっと実用的な条件を見出すために，次のような仮定をすると便利である．$X \supset Y$ のような2つの Banach 空間の代りに

$$\begin{array}{ccccccccc} X = X_0 & \supset & X_1 & \supset & X_2 & \supset & \cdots\cdots & \supset & X_n \\ & & \cup & & \cup & & & & \cup \\ & & Y = Y_1 & \supset & Y_2 & \supset & \cdots & \supset & Y_n \end{array} \tag{17a}$$

のような，Banach 空間の二重系列を考える．ここで横の $\supset$ は連続な埋めこみを意味するが，縦の $\cup$ は Y_k が X_k の閉部分空間になっていることを意味する．特に Y は X_1 の閉部

分空間で，$Y_k = X_k \cap Y$ と仮定する．

$A(t)$ はこれらの空間の間に次のように働らくものとする．

先ず　(10) 及び (11) が成立すると仮定し，次に

$$d^k A \in L^\infty_*(I; B(Y_{j+k}, X_j)), \quad 0 \leq j \leq n-k, \quad 1 \leq k \leq n, \tag{18}$$

のようにAのなめらかさを仮定する．こゝに $k=0$ は含まれないことを特に注意する．最后に次の意味で $A(t)$ が"楕円型"であることを仮定する：$\phi \in Y$ で $A(t)\phi \in X_j$ ならば実は $\phi \in Y_{j+1}$ で

$$|\phi|_{j+1} \leq \nu(|A(t)\phi|_j + |\phi|_0), \tag{19}$$

たゞし ν は定数である．($|\ |_j$ は X_j のノルム)．

これらの仮定をすると次のことが証明できる．

$\xi > \beta$ ならば $A(t)+\xi$ は Y_{j+1} より X_j への同型写像である ($0 \leq j \leq n-1$)．

$C_1 = dA(A+\xi)^{-1}$ とおけば

$$d^k C_1 \in L^\infty_*(I; B(X_{j+k}, X_j)), \quad 0 \leq k, j, \quad j+k \leq n-1. \tag{20}$$

故に $A_1 = A - C_1$ とおけば，A_1 は A と同様 (10), (11), (18) および (19) を満足する．たゞし n は $n-1$ でおきかえ，β は別の定数 β_1 でおきかえるものとする．

この過程は繰り返すことができる．すなわち $C_2 = dA_1(A_1+\xi_1)^{-1}$

（ただし $\zeta_1 > \beta_1$）とおけば C_2 は (20) で $n-1$ を $n-2$ でおきかえた条件を満たし，したがって $A_2 = A_1 - C_2$ は (10), (11), (18) および (19) を満たす，ただし n は $n-2$ で，β は別の定数 β_2 でおきかえる．

以下同様にして §12 にのべた構成が可能となる．しかも今度は，条件 (10), (11), (18), (19) を検証しておけば，あとの過程は自動的に行われるから，この方法は実用的である．

このようにして解の正則性として，$\Phi \in D(S_m(0))$ ならば $u(t) \in D(S_m(t))$，および $u \in C^k(I; Y_{m-k})$，$0 \le k \le n-1$，$u \in C^n(I; X)$，という結果がえられる．

ただし $S_k(t)$ の定義は前と同様 (15a) で，定数 $\zeta, \zeta_1, \cdots$ のえらび方に依存するが，$D(S_k(t))$ はこれらの定数に依存しない Y_k の閉部分空間であることが示される．以下これを $D_k(t)$ と記す．かくして $\Phi \in D_m(0)$ ならば $u(t) \in D_m(t)$ という形で主要な正則性の結果が与えられる．

§14. このように $D_k(t) \subset Y_k$ は極めて重要な部分空間であるから，その特徴づけ如何という問題が生ずる．これは次のように解かれる．帰納法によって次のような作用素列：$S^0(t) = 1$, $S^1(t)$, $S^2(t)$, $\cdots$, $S^m(t)$ を作る，ただし $D(S^1(t)) \supset D(S^2(t)) \supset \cdots \supset D(S^m(t))$．$S^j(t)$ まで定義されたとすると，$S^{j+1}(t)$ は次の式で与えられる：

$$S^{j+1}(t)\psi = -\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(d^{j-k}A(t))\,S^{k}(t)\,\psi, \qquad (21)$$

ただし $D(S^{j+1}(t))$ は, $\psi \in D(S^{j}(t))$ かつ $k \leq j$ なら $S^{k}(t)\psi \in Y_{j+1-k}$ であるような ψ の全体とする. このとき (21) が意味をもつことは, (18) を用いて容易にわかる.

このように $S^{j}(t)$ を定義したとき

$$D_j(t) = D(S^{j}(t)) \qquad (22)$$

が成立する. (これは $D_j(t)$ が定数 $\xi, \xi_1, \cdots$ によらないことを明示している.)

なお j の小さい値に対する $S^{j}(t)$ の形は次の如くである (簡単のため変数 t を省略する).

$$\begin{aligned} &S^0 = 1, \quad S^1 = -A, \quad S^2 = -dA + A^2, \\ &\quad S^3 = -d^2A + 2(dA)A - A(-dA + A^2), \quad \cdots \end{aligned} \qquad (23)$$

§15. 上の理論を線型化された発展方程式 (3-2) に適用すれば, 自明の 亜$: E \to E$ を成熟する可能性がえられる. それには, まず系列 (17a) を適当にえらんで, W が X_n の開集合になるようにする. すなわち十分高階の X_n の開集合 W をとれば, $w \in W$ に対して $A(w) \in G(X, M, \beta)$ が成立するということである. 応用上 X_n は Sobolev 空間 $H^m(\Omega)$

の如きものであるから，この仮定は適切である。

さて E の定義であるが，$v \in E$ の第一条件として $v(t) \in W$ および $d^k v \in L^\infty_*(I'; X_{m-k})$, $0 \le k \le m$ を要求する ($I' = [0, T']$). すると写像 $w \mapsto A(w)$ に適当な仮定を立てて，$v \in E$ のときに $A^v(t) = A(v(t))$ が条件 (10), (11), (18), (19) を満足するように按配することは比較的容易である。(10), (19) については直接これを $A(w)$ に仮定する。(11) については，§6 でしたように，X の可変ノルム $\| \ \|_w$ を利用する条件を与えてもよいし，或いは $v \in E$ が上述の条件を満足すれば A^v が (11) を満足する，という間接的な仮定をおいても別に不便ではない。

すこし厄介なのは (18) で，写像 $w \longmapsto A(w)$ の微分可能性に関係する。これは多数の空間 X_k が関係するため，通常の Fréchet 微分の概念では記述できない。それでこの場合にも，むしろ次のような間接的な条件を導入する方が実用的のようである。すなわち，$v \in E$ が上述の条件を満足するとき

$$d^k A^v(t) = F^k(v(t), dv(t), \cdots, d^k v(t)), \quad 1 \le k \le m, \tag{24}$$

と書けるとする。ただし F^k は

$$W \times X_{m-1} \times \cdots \times X_{m-k} \longrightarrow \bigcap_{j=0}^{m-k} B(Y_{k+j}, X_j) \tag{25}$$

での連続写像と仮定する。更に

$$|A(w') - A(w)|_{Y_m, X_0} \le \mu |w' - w|_0, \quad w, w' \in W \tag{26}$$

を仮定する（(6) を参照）。

これらの仮定の下に A^v が §13 の諸条件を満足することが証明できる。したがって問題 (3−2) が解ける。

§16. そこで $\Phi : v \longmapsto u = \Phi v$ が E を E にうつすことを示したいのであるが，それには更に E に制限を加える必要がある。その理由は，$u \in E$ をいうには §13 の高階正則性，すなわち $\varphi \in D_m^v(0) \Longrightarrow u(t) \in D_m^v(t)$ を用いるわけである（§13 の $D_m(t)$ は v によるから $D_m^v(t)$ とかく）が，それには与えられた $\varphi \in W$ に対し，$\varphi \in D_m^v(0)$ が成立せねばならない。ところで $D_m^v(0)$ の作り方は §14 に示したように，$d^k A^v(0)$ $(0 \leq k \leq m-1)$ に依存するから，(24) によってまた $d^k v(0)$ $(0 \leq k \leq m-1)$ に依存する。これらの $d^k v(0)$ が勝手であっては $\varphi \in D_m^v(0)$ は保証されない。したがって $d^k v(0)$

の値は制限されるべきであり、これがΞに課せられる新しい条件になる。

この条件を見出すためには次の計算をする。$du = -A^{v}(t)u$ を形式的に逐次微分すると、(24)を用いて

$$d^{k+1}u(t) = G^{k}(v(t), dv(t), \cdots, d^{k}v(t); u(t), \cdots, d^{k}u(t)),$$
$$0 \leq k \leq n-1 \tag{28}$$

の形の式を得る。ここに G^{k} は

$$(W \times X_{n-1} \times \cdots \times X_{n-k}) \times (Y_n \times \cdots \times Y_{n-k}) \longrightarrow X_{n-k-1}$$

での連続写像である。ここで $d^{k}u(t) \in Y_{n-k}$ と暗に仮定したが、これは $\phi \in D_m^{v}(0)$ が満たされていれば正しいことは $u(t) \in D_m^{v}(t)$ からわかる。(便宜上 $Y_0 = X$ と約束する。)

そこで与えられた $\phi \in W \cap Y \subset Y_n$ から出発して

$$\phi_1 = G^{0}(\phi; \phi), \quad \phi_2 = G^{1}(\phi, \phi_1; \phi, \phi_1),$$
$$\phi_3 = G^{2}(\phi, \phi_1, \phi_2; \phi, \phi_1, \phi_2), \quad \cdots \tag{29}$$

によって $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ を計算する。ただしまず $\phi_1 \in X_{n-1}$ となるがこれが $\phi_1 \in Y$ (したがって $\phi \in Y_{n-1}$) を満たすことを仮定しないと次へ進めない。その上で $\phi_2 \in X_{n-2}$ となるが、これが $\phi_2 \in Y$ (したがって $\phi_2 \in Y_{n-2}$) を満たすことを仮定して次へ進むのである。このようにして $\phi_{n-1} \in Y$, まで成立するとき、ϕ を許される初期値と呼ぶ。許される初期値の全体を M とする。M は Y の中の多様体の如

きものである.

そこで今 $\phi \in M$ と仮定して $\phi_1, \cdots, \phi_n$ を作り, $v \in E$ に対して

$$d^k v(0) = \phi_k, \qquad 0 \leq k \leq n-1 \qquad (30)$$

という条件をつける（$\phi_0 = \phi$ と約束）．すると $\phi \in D_m^v(0)$ となることがわかる．何故ならば $D_m^v(0) = D(S^{v,m}(0))$ であるが（$S^{v,j}$ は $A = A^v$ のときの S^j を表わす），§14 にのべた $S^{v,j}$ の作り方と，(29) による ϕ_j の作り方を比較してみれば，

$$\phi \in D(S^{v,j}(0)), \quad S^{v,j}(0)\phi = \phi_j, \qquad 0 \leq j \leq n, \qquad (31)$$

となることが帰納法でたしかめられるのである．

$\phi \in D_m^v(0)$ がわかれば §13 によって $u(t) \in D_m^v(t)$ となり，したがって (28) の計算によって，$d^k u(0) = \phi_k$ となることがまた帰納法でわかる．すなわち条件 (30) は v から $u = \Phi v$ にうつっても保存される．

§17. 以上により E の正確な定義は次のようにすればよいことが予想される。$v \in E$ の條件として，

$$|d^k v(t) - \phi_k|_{m-k} \le \rho'_k, \qquad 0 \le k \le m, \tag{32}$$

$$d^k v(0) = \phi_k, \qquad 0 \le k \le m-1 \tag{33}$$

ただし ρ'_k は X_m での ϕ の ρ'_0-近傍が W に含まれるかぎり任意の正数とする。上述のように，かゝる v に対しては $\phi \in D^v_m(0)$ となるから，(3-2) の解 $u = \Phi v$ は $d^k u(t) \in Y_{m-k} \subset X_{m-k}$ を満たし，t が十分小さければ再び (32) を満足する可能性がある。また u が (33) を満たすことは，上と同様 (29) を用いて験証される。

実際に $u \in E$ であることを正確に証明するには，もっと定量的な議論が必要である。このためには線型発展方程式の発展作用素に関する詳しい評価を用いなければならないが，こゝには省略する。

$\Phi: E \to E$ が示されれば，あとの議論は全く周知の軌道に乗るから，これまた省略したい。

詳細は Kato [7] をみられたい。

§18. 以上で抽象理論としては一応の形がととのったようにみえるが、ここでひとつのかくれた仮定として、Eが空でないという條件を加えなければならない。実際(32),(33)を満足するvが存在することは、一般には証明できそうにない。しかしこの仮定は、 $X_{\frac{1}{2}}=H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, $Y=H_0^1(\Omega)$ のような典型的な応用では満足されているので問題はない。

なおMが空でないという保証もない。しかしMが空であったならば、解が存在しなくてもやむをえない。何故なら(1-2)の解uが存在して十分なめらかであれば、$\varphi\in M$ でなければならないことが、(28),(29)の計算で示されているからである

通常の応用ではMが空でないことはすぐにわかる。上述の例では $C_0^\infty(\Omega)\subset M$ であることは明らかである。(しかしこの議論には十分説得力がない。$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ は仮定として強すぎるから。)

解 $u(t)$ が φ に連続に依存するかどうか、これも未解決である。

最後に応用について一言すると、上の結果は $[0,T]\times\Omega$ での2階の準線型波動方程式の系(弾性論のような場合)で境界條件 $u=0$ を課した場合に適用できそうに思われるが、ひとつ未解決の点がある。それは2階線型強楕円型方程式の系に対して、條件(19)を保証する正則性定理が文献に見当らないこ

とである。単独方程式の場合には Morrey [8] の定理5.6.3が使えるが，相当する定理が系の場合に成立するかどうかわかっていないようである。

文献

[1] 田辺広城，発展方程式，岩波 1975.

[2] 増田久弥，発展方程式，紀伊國屋 1975.

[3] T. Kato, The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, Arch. Rational Mech. Anal. 58 (1975), 181-205.

[4] T. Kato, Quasi-linear equations of evolution, Lecture Notes in Math. 448, Springer 1975, pp. 25-70.

[5] T. Hughes, T. Kato and J. E. Marsden, Well-posed quasi-linear second-order hyperbolic systems with applications to nonlinear elastodynamics and general relativity, Arch. Rational Mech. Anal. (近刊).

[6] K. O. Friedrichs, On the laws of relativistic electro-magneto-fluid dynamics, Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 749-808.

[7] T. Kato, Linear and quasi-linear equations of evolution of hyperbolic type, Lecture Notes, Hyperbolicity, C. I. M. E. (Cortona), 1976.

[8] C. B. Morrey, Jr., Multiple integrals in the calculus of variations, Springer 1966.